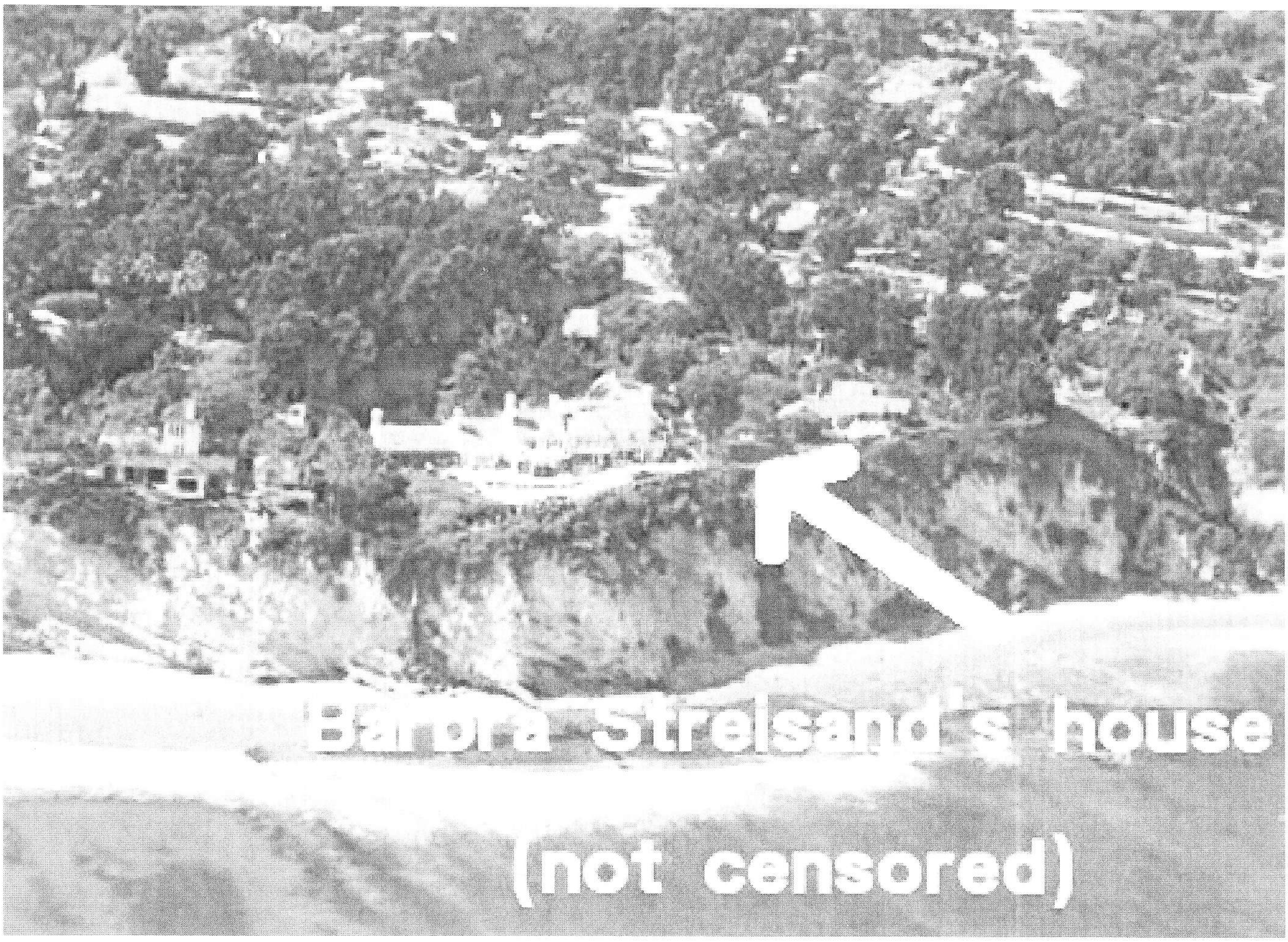
Das eindimensionale Riemann-Integral

Ilka Agricola

Version vom 21. Oktober 2017

Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Str., D-35032 Marburg
E-mail address: agricola@mathematik.uni-marburg.de
URL: http://www-irm.mathematik.uni-marburg.de/~agricola/


Barbra Streisand's house
(not censored)

1. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Stammfunktionen

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, so schreiben wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

für das Integral über den eindimensionalen Quader $[a,b]$. Dabei soll immer $a \le b$ sein, so dass etwa ein Integral mit vertauschten Integrationsgrenzen keinen Sinn macht. Wir untersuchen nun die Funktion, die entsteht, wenn man eine der Intervallgrenzen als variabel auffasst.

Satz 1. *Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Dann gilt:*

(1) *$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig,*

(2) *Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F dort differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Für $M := \sup_{t\in[a,b]} f(t)$ gilt $(y < x)$

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \le \int_y^x |f(t)|\,dt \le M(x-y).$$

Diese Abschätzung besagt gerade, dass F auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist.
Sei nun f in x_0 stetig, $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ mit $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle t mit $|t - x_0| < \delta$. In diesem Fall gilt auf dem Intervall $[x_0, t]$ (analoges Argument auf dem Intervall $[t, x_0]$)

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{\int_a^t f(u)\,du - \int_a^{x_0} f(u)\,du}{t - x_0} - \frac{1}{t - x_0}\int_{x_0}^t f(x_0)\,du\right| \\ &= \left|\frac{1}{t - x_0}\int_{x_0}^t [f(u) - f(x_0)]\,du\right| < \frac{1}{t - x_0}\varepsilon(x_0 - t) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Folglich existiert $F'(x_0)$ und ist gleich $f(x_0)$. □

Satz 2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und existiert eine differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Wir zerlegen das Intervall $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ und wenden auf $F\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ den MWS der Differentialrechnung an. Es existieren demnach Zahlen $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$ mit

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Damit folgt

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^n \sup f\big|_{[x_{i-1},x_i]}(x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i_1}}(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

und analog

$$\underline{S}(f,P) \le F(b) - F(a)$$

Dann ist aber für jede Zerlegung

$$\underline{S}(f,P) \le F(b) - F(a) \le \overline{S}(f,P), \text{ also } \int^u f = \sup \underline{S}(f,P) \le F(b) - F(a) \le \inf \overline{S}(f,P) = \int^o f.$$

Da f Riemann-integrierbar ist, sind Ober- und Unterintegral gleich und damit gleich $F(b) - F(a)$. □

Definition 1 (Stammfunktion). Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, so heißt jede differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mir $F' = f$ eine *Stammfunktion* von f. Falls f eine Stammfunktion besitzt, so empfiehlt es sich natürlich, das Integral über eine Stammfunktion F und nicht über Riemann'sche Summen zu berechnen, also als

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a).$$

Lemma 1.

(1) *Jede stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion.*

(2) *Sind F, G Stammfunktionen der gleichen Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so gilt $F(x) = G(x) + c$ für eine Konstante c und alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus Satz 1 [Dfn und Eigenschaften von $F(x) = \int_a^x f\,dx$], die zweite folgt aus der Tatsache, dass nach dem MWS der Differentialrechnung eine differenzierbare Funktion $H(= F - G)$ mit $H' = 0$ konstant ist. □

Aus der Schule erinnert man sich an die Schwierigkeiten, die es mitunter machen kann, eine Stammfunktion zu bestimmen. Die sogenannten *elliptischen Funktionen* liefern hierzu ein bekanntes Beispiel (die Stammfunktion existiert, besitzt aber keine vernünftige Darstellung). Das Problem ist aber tieferer, systematischer Natur, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1. Nicht jede Riemann-integrierbare Funktion besitzt eine Stammfunktion. Ist nämlich F auf $[a, b]$ differenzierbar, so har F' dort die Darboux-Eigenschaft[1] – auch wenn F' nicht stetig ist (siehe HA). Damit gilt: Jede Riemann-integrierbare Funktion, die eine Stammfunktion hat, besitzt die Darboux-Eigenschaft. Es gibt aber Riemann-integrierbare Funktionen, die diese Eigenschaft nicht haben! Zum Beispiel ist dies für

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t \leq 1/2 \\ 1 & t > 1/2 \end{cases}$$

der Fall.

Beispiel 2. Nicht jede Funktion, die eine Stammfunktion besitzt, ist Riemann-integrierbar. Zum Beispiel ist $f(x) = x^{3/2}\sin(1/x)$ auf $[0, 1]$ eine anständige differenzierbare Funktion, aber ihre Ableitung

$$g'(x) \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$$

ist auf $[0, 1]$ unbeschränkt, also auf gar keinen Fall Riemann-integrierbar.

Bemerkung 1. Die Riemann-Integrierbarkeit einer Ableitung kann auch an der Stetigkeit zerbrechen, und zwar sowohl von f als auch von f'. Es gilt: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann absolut stetig (das ist stärker als stetig, und eine differenzierbare Funktion muss nicht absolut stetig sein!), falls f' Lebesgue-integrierbar ist Ein ähnlich klarer Satz scheint für die Riemann-Integrierbarkeit nicht bekannt zu sein.
Auch die Ableitung kann Schwierigkeiten machen: Es existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die überall differenzierbar ist, aber die Menge der Unstetigkeitsstellen von f' hat positives Lebesgue-Maß (was wir nicht definiert haben, aber egal), kann also nicht R-integrierbar sein[2]. Diese Ergebnisse und Beispiele können aber erst im Rahmen der Vorlesung Maß- und Integrationstheorie behandelt werden. Insgesamt zeigen die vorherigen Bemerkungen, dass das R-Integral gut für den Hausgebrauch, aber theoretisch unbrauchbar ist.

Zum Film *Die „Hauptsatzmaschine“ – zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*:

[1] Darboux-Eigenschaft: Zwischen zwei Punkten a, c mit $f(a) < \lambda < f(c)$ existiert ein b mit $f(b) = \lambda$.

[2] Siehe Natanson, Theorie der reellen Funktionen einer Veränderlichen, Abschnitt 5.5.

- Ein *Integraph* zeichnet zu jedem Graphen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$. Nach Dfn ist $F(x)$ die Fläche unter dem Graphen von f von a bis x.

- Wenn $f \geq 0$ ist, dann ist F monoton wachsend.

- Wenn f eine Treppenfunktion ist, dann ist F eine stetige, stückweise lineare ($\Rightarrow$ stückweise differenzierbare) Funktion – also eine „stetige, stückweise Stammfunktion".

2. Elementare Methoden zur Berechnung von Integralen

Definition 2. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion, die eine Stammfunktion besitzt. Unter dem *unbestimmten Integral* $\int f(t)\,dt$ versteht man die Familie *aller* Stammfunktionen von f. In diesem Sinne gilt etwa:

$$(1) \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$(2) \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \; x \neq 0$$

$$(3) \quad \int \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} & (\alpha > 1) \\ \ln|x-a| & (\alpha = 1) \end{cases}$$

$$(4) \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$(5) \quad \int \cos x\,dx = +\sin x + c$$

$$(6) \quad \int \tan x\,dx = -\ln\cos x + c, \; x \in [0, \pi/2]$$

$$(7) \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 1)$$

$$(8) \quad \int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

$$(9) \quad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0)$$

$$(10) \quad \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctanh}\dfrac{x}{a} + c = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x} + c & |x| < a \\ \dfrac{1}{a}\operatorname{arccoth}\dfrac{x}{a} + c = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x+a}{x-a} + c & |x| > a \end{cases} \qquad (a > 0)$$

$$(11) \quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \quad (|x| < 1)$$

$$(12) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \quad (|x| < 1)$$

$$(13) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c'$$

$$(14) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c'$$

Diese Grundintegrale sind *auswendig zu lernen*, denn die meisten Methoden zur Berechnung von Integralen führen komplizierte Integrale auf diese Grundintegrale zurück. Die Integrationskonstante c lässt man meist weg, da klar ist, dass das unbestimme Integral nur bis auf eine solche Konstante definiert ist.

Aus den Rechenregeln für das Differenzieren ergeben sich folgende Rechenregeln für Integrale:

Satz 3. (1) *Partielle Integration: Sind f und g differenzierbar auf $[a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx, \qquad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

(2) *Substitutionsregel: Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit Stammfunktion G, $f : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ differenzierbar und $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$, so hat auch $(g \circ f)f' : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und es gilt*

$$\int_\alpha^\beta (g \circ f)(x) f'(x)\,dx \;=\; \int_a^b g(y)\,dy, \quad \int (g \circ f)(x) f'(x)\,dx \;=\; G \circ f.$$

2.1. Methode der überflüssigen partiellen Integration. Bei diesem Kunstgriff wird die Stammfunktion reproduziert, die man eigentlich berechnen möchte, wie etwa in dem folgenden Beispiel:

$$\int \sin x \cos x\,dx \;=\; \sin^2 x - \int \cos x \sin x\,dx,$$

was dann auf $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$ führt und die Aufgabe löst. Eine Verfeinerung dieser Methode wird bei der Integration rationaler Funktionen besprochen (Beispiel 9): Ein eigentlich bekanntes Integral wird partiell so integriert, dass ein anderes gesuchtes Integral entsteht.

Bemerkung 2. Die Substitutionsregel wendet man intuitiv wie folgt an: ersetze die Variable y durch $y = f(x)$ und schreibe die Integrationsgrenzen als $a = f(\alpha), b = f(\beta)$, dann ist $dy = f'(x)dx$ und es gilt

$$\int_a^b \underbrace{g(y)}_{=g(f(x))}\;\underbrace{dy}_{f'(x)dx} \;=\; \int_\alpha^\beta g(f(x))f'(x)dx.$$

2.2. Methode der logarithmischen Ableitung. Dies ist ein besonders einfacher Spezialfall der Integration durch Substitution (für Stammfunktionen). Ist $f(x)$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall, wo sie keine Nullstellen hat, so folgt mit $g(x) = 1/x$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \;=\; \ln|f(x)|.$$

Dabei haben wir folgendes verwendet: Weil f keine Nullstellen hat, ist entweder $f > 0$ oder $f < 0$. Wenn $f > 0$, dann ist $(\ln f)' = f'/f$, und wenn $f < 0$, folgt $(\ln(-f))' = (-f)'/(-f) = f'/f$. Die Formel mit dem Betrag fasst beide Ergebnisse also zusammen. Der Bruch $\frac{f'(x)}{f(x)}$ wird oft *logarithmische Ableitung* von f genannt. Ein einfaches Beispiel ist

$$\int \tan x\,dx \;=\; -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \;=\; -\ln|\cos x|$$

auf jedem Intervall, dass kein ungerades Vielfaches von $\pi/2$ enthält.

2.3. Substitutionsmethode von links nach rechts. Diese Methode besagt, dass man die Berechnung einer beliebigen Stammfunktion $\int g(y)\,dy$ dadurch auf eine andere Integrationsaufgabe zurückführt, dass man für y eine Funktion $f(x)$ einsetzt und demgemäß das Integral auf der rechten Seite betrachtet. Der Nutzen dieser Methode liegt in der großen Freiheit, die man bei der Wahl der Funktion f hat.

Beispiel 3. Für Integrale der Bauart $\int (1+x^2)^{-3/2}\,dx$ hat sich die Substitution $x = \tan t$, also $t = \arctan x$ bewährt ($|t| < \pi/2$). Dann wird nämlich

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos x}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

und damit geht das Integral über in (im vorletzten Schritt konsultiere man die trigonometrische Formelsammlung im Anhang!)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}\,dx \;=\; \int \cos^3 t \frac{dt}{\cos^2 t} \;=\; \int \cos t \;=\; \sin t \;=\; \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \;=\; \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2.4. Substitutionsmethode von rechts nach links. Sucht man die Stammfunktion eines Produkts, so kann man versuchen, dieses Produkt als $g(f(x))f'(x)$ aufzufassen, wie etwa in den folgenden Beispielen:

- $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int y^3 dy = \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{4}\sin^4 x \qquad (f(x) = \sin x = y,\ g(y) = y^3)$
- $\int e^{x^2} x \, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int e^y \, dy = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} \quad (f(x) = x^2 = y,\ g(y) = e^y)$

2.5. Das Wallis'sche Produkt. Sei $I_n := \int \sin^n x \, dx$. Wir leiten eine Rekursionsformel für I_n wie folgt her:

$$\begin{aligned} I_n &= -\int \sin^{n-1}(x)\cos' x \, dx \overset{p.I.}{=} -\sin^{n-1}(x)\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1}(x)\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx \\ &= -\sin^{n-1}(x)\cos x - (n-1)I_n + (n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

Also gilt $I_0 = x, I_1 = -\cos x$ und danach

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Wir berechnen nun den Wert von I_n bei Integration über das Intervall $[0, \pi/2]$ mit einem kleinen Trick, getrennt für geraden und ungeraden Index. Wegen $\sin 0 = 0,\ \cos \pi/2 = 0$ folgt

$$I_n(0) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(0), \quad I_n(\pi/2) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(\pi/2).$$

Zudem ist $I_0(0) = 0,\ I_1(0) = -1,\ I_0(\pi/2) = \pi/2,\ I_1(\pi/2) = 0$, so dass insgesamt

$$\begin{aligned} I_{2n}(0) &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}(0) = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0(0) = 0, \\ I_{2n}(\pi/2) &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}(\pi/2) = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ebenso beweist man

$$I_{2n+1}(\pi/2) = 0, \quad I_{2n+1}(0) = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot(-1).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx &= I_{2n}(\pi/2) - I_{2n}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx &= I_{2n+1}(\pi/2) - I_{2n+1}(0) = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}. \end{aligned}$$

Mi Kenntnis dieser beiden Integrale wollen wir folgendes Ergebnis beweisen, das zuerst von John Wallis[3] 1656 bewiesen wurde:

(Wallis-Formel) $$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right]^2.$$

[3] Britischer Mathematiker (1616-1703), der ab 1649 Professor an der Universität Oxford war. Berufen wurde er für seine Leistungen beim Entziffern geheimer Botschaften.

Aus den beiden Integralen erhalten wir nämlich zunächst

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \left[\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx}\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right]^2 \underbrace{\frac{n}{2n+1}}_{\to 1/2}\cdot\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx}\end{aligned}$$

Wenn wir zeigen können, dass das Verhältnis der Integrale für $n\to\infty$ gegen 1 konvergiert, so folgt die Behauptung. Für $0\le x\le\pi/2$ haben wir jedoch

$$0 \le \sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x \le \sin^{2n-1}x,$$

also nach Integration

$$0 \le \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx \le \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx \le \int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx$$

und weiter nach Bilden des Verhältnisses

$$1 \le \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx} \le \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx} = \frac{\dfrac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}{\dfrac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}} = \frac{2n+1}{2n} = 1+\frac{1}{2n}.$$

Damit ist die Wallis-Formel bewiesen. Weil man den auftretenden Quotienten noch umformen kann,

$$\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = \frac{(2^n n!)2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!},$$

kann die Wallis-Formel äquivalent auch geschrieben werden als

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

Beispiel 4. Wir führen das Integral $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$ mittels Substitution auf eines der soeben behandelten Gestalt zurück. Wir substitutieren $x=\cos t$, $dx=-\sin t\,dt$ mit Integrationsgrenzen $x=0\leftrightarrow t=\pi/2$, $x=1\leftrightarrow t=0$, so dass

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx = -\int_{\pi/2}^0(1-\cos^2 t)^n\sin t\,dt = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots(2n+1)}.$$

Beispiel 5. Auch das Integral $\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2 x)^{-1/2}dx$ mit $|k|<1$ lässt sich nach Reihenentwicklung auf diese Integrale zurückführen. Die Binomialreihe (siehe Analysis 1) besagte

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = 1-\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}y^3\pm\ldots,$$

also für $y=-k^2\sin^2 x$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 x+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 x+\ldots$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium ist diese Reihe wegen $|\sin x|\le 1$ und $|k|<1$ gleichmäßig konvergent, alle Terme sind polynomial, also klarerweise Riemann-integrierbar, es ist damit

Korollar 2 der Vorlesung anwendbar und es darf gliedweise integriert werden,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx &= \int_0^{\pi/2} dx + \frac{k^2}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx + \frac{3k^4}{2\cdot 4}\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx + \frac{3\cdot 5\cdot k^6}{2\cdot 4\cdot 6}\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx + \ldots\\ &= \frac{\pi}{2}\left(1+\left[\frac{1}{2}\right]^2 k^2 + \left[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right]^2 k^4 + \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right]^2 k^6 + \ldots\right)\end{aligned}$$

Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung wird in der Schule mitunter nicht behandelt, obwohl er genauso nützlich und wichtig ist wie der erste. Das holen wir jetzt nach.

Satz 4 (Zweiter MWS der Integralrechnung). *Sei $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $g:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Dann existiert ein Punkt $\xi\in[a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Sei F die Stammfunktion der stetige Funktion f. Weil g monoton wachsend und differenzierbar ist, gilt $g'\geq 0$. Wir wenden den ersten MWS auf $F(x)g'(x)$ an (zulässig: F ist als Stammfunktion stetig und g' ist als Ableitung integrierbar), d. h. es existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b F(x)g'(x)\,dx \;=\; F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx.$$

Aber

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b F'(x)g(x)\,dx \;=\; F(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\\ &= F(b)g(b)-F(a)g(a)-F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx\\ &= F(b)g(b)-F(a)g(a)-F(\xi)(g(b)-g(a))\\ &= g(a)(F(\xi)-F(a))+g(b)(F(b)-F(\xi))\\ &= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx. \qquad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 3. Der zweite MWS gilt auch, wenn f nur integrierbar und g nur monoton ist! Der Beweis ist dann allerdings erheblich schwieriger (vgl. Mangoldt-Knopp, *Einführung in dei höhere Mathematik III*, Abschnitt 44). Wir benötigen den Satz in dieser stärkeren Form vermutlich nur einmal in der Analysis 3, in der Theorie der Fourier-Reihen, weswegen wir den Beweis dem interessierten Leser zum Selbststudium überlassen.

Beispiel 6. Wir zeigen, dass für $0<a<b$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx = 0$. Sei dazu $f(x)=\sin nx$, $g(x)=-1/x$, wobei n gar nicht ganzzahlig, sondern nur positiv sein muss. Nach zweitem MWS gilt für ein $\xi\in[a,b]$

$$-\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx = -\frac{1}{a}\int_a^{\xi}\sin nx\,dx - \frac{1}{b}\int_{\xi}^b \sin nx\,dx.$$

Dies impliziert

$$\left|\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx\right| \;\leq\; \frac{1}{an}\big|\cos n\xi - \cos na\big| + \frac{1}{bn}\big|\cos nb-\cos n\xi\big| \;\leq\; \frac{2}{an}+\frac{2}{bn}.$$

Im Limes $n\to\infty$ folgt die Behauptung.

3. Fortgeschrittene Methoden zur Berechnung von Integralen

3.1. Integration rationaler Funktionen. Hierzu stellt man die reelle PBZ der rationalen Funktion f her (siehe Kapitel 2),

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x-z_i)^j(x-\bar{z}_i)^j} \tag{1}$$

wobei gilt:

(1) $r(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\deg p - \deg q$; gilt $\deg p < \deg q$, so ist dieser Term nicht vorhanden.
(2) $x_1, \ldots, x_n$ sind die reellen Polstellen der Vielfachheit $r_1, \ldots, r_n$ von f.
(3) $z_1, \ldots, z_m$ sind die komplexen Polstellen der Vielfachheit $s_1, \ldots, s_m$ von f.
(4) a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sind reelle Zahlen.

Ist die PBZ bekannt, so wendet man die Kenntnis der Grundintegrale an und integriert alle Summanden separat. Für die ersten beiden Terme wissen wir die Antwort bereits, für die verbleibenden Terme verwende man folgende Ergebnisse:

Beispiel 7. Uns interessiert der Wert des Referenzintegrals

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{für } a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Zunächst ist mit quadratischer Ergänzung

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{4a}{(2ax+b)^2-(b^2-4ac)}\,dx.$$

Substitutiert man $2ax+b=t$, also $x=(t-b)/2a$, $dx = dt/2a$, so ergibt sich

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2-(b^2-4ac)}\,dt.$$

Wir sehen, dass die Grundintegrale (3), (9) und (10) hier anwendbar sind, und zwar je nachdem, ob die Diskriminante $\Delta := b^2-4ac$ positiv, negativ oder null ist. Durch Einsetzen erhält man sofort

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & \Delta < 0 \\ -\dfrac{2}{2ax+b} & \Delta = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| & \Delta > 0 \end{cases}.$$

Dabei sind in der letzten Formel die beiden Fälle des Grundintegrals (10) wieder mit Hilfe des Betrages in einer Formel zusammengefasst. Diese Formel gilt auf jedem Intervall, auf dem $ax^2+bx+x \neq 0$ ist. Das Referenzintegral ($k>1$)

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$$

führt man iterativ auf diesen Fall zurück, in dem man den Integranden zur Potenz $k-1$ durch partielle Integration auf den Grad k erhöht; durch Umstellen bekommt man eine Formel für den Grad k, ausgedrückt durch Grad $k-1$ und weitere Terme (siehe Beispiel 9).

Beispiel 8. Um nun den verbleibenden Term in Gl. (1) integrieren zu können, betrachten wir einen Term der Form

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Ist hier der Zähler zufällig gleich der Ableitung des Nenners, also $A = 2a$ und $B = b$, dann ist nach der Methode der logarithmischen Ableitung

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \;=\; \ln|ax^2+bx+c|.$$

Auf dieses Integral kann man die allgemeine Form zurück führen, denn eine elementare Umformung ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx\\ &= \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx\end{aligned}$$

Der gleiche Umformungstrick kann angewandt werden auf ($k > 1$)

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx \;=\; -\frac{A}{2a(k-1)}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx.$$

Wir halten das qualitative Ergebnis fest:

Korollar 1. *Jede rationale Funktion mit reellen Koeffizienten kann mittels rationaler Funktionen, des Logarithmus und des Arcustangens integriert werden.*

Beispiel 9. Die rationale Funktion $f(x) = (x^2+1)^{-2}$ liegt bereits in ihrer PBZ vor, nach der allgemeinen Methode aus Beispiel 7 betrachten wir den Integranden zu $k-1 = 1$ und integrieren partiell, um das gesuchte Integral zu erzeugen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}\,dx - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Nach Kürzen und Umstellen folgt, weil $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ eines der uns bekannten Grundintegrale ist,

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \;=\; \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x.$$

Beispiel 10. Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2}.$$

Weil der Nenner bereits faktorisiert ist und einen ums eins höheren Grad als der Zähler hat, muss der Ansatz der PBZ lauten

$$f(x) \;=\; \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

Man findet $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -3, B_1 = 2, B_2 = -5$. Damit ist

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int \frac{1}{x-2}\,dx - 3\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + 2\int \frac{1}{x+3}\,dx - 5\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx.$$

Mit den Grundintegralen (3) folgt sofort

$$\int f(x)\,dx \;=\; \ln|x-2| + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2} + 2\ln|x+3| + \frac{5}{x+3}.$$

Die allgemeine Methode zur Integration rationaler Funktionen hat viele Anwendungen. Sei R im folgenden immer eine rationale Funktion.

3.2. Integration von $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$. Hier substituiert man $t = \sqrt[n]{ax+b}$, also $x = (t^n - b)/a$ und $dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$. Daher ist

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx = \int R(\frac{t^n-b}{a}, t)\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt,$$

und dies ist eine rationale Funktion von t, auf die die bisherigen Methoden angewandt werden können.

Beispiel 11. Das Integral über $R = \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}$ geht durch die Substitution $\sqrt{x-1} = t, x = t^2+1, dx = 2t\,dt$ über in

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,dx = 2\int \frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\,t\,dt$$

und wird dann mit PBZ berechnet.

3.3. Integration von $\int R(e^x)\,dx$. Man verwendet die Substitution $t = e^x, dx = 1/tdt$, so dass

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

Beispiel 12. Auf direktem Wege sieht man nun:

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{1}{t+1/t}\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t = \arctan(e^x).$$

3.4. Integration rationaler trigonometrischer Funktionen. Hierunter versteht man Integrale der Gestalt

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx.$$

Hierfür gibt es mehrere Substitutionsmethoden; die folgende führt immer auf rationale Funktionen, muss aber nicht zwingend die einfachste sein. Man substituiere $x = 2\arctan t$, also $t = \tan(x/2)$ und damit $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Nach den Winkelverdoppelungsformeln (siehe Kapitel 2) ist dann

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Beispiel 13. Für a und b reelle Konstanten führt diese Methode auf

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = 2\int \frac{1}{(a+b)+(a-b)t^2}\,dt,$$

und je nach Wert der Konstanten ergibt dies bei der Integration einen Logarithmus, einen Arcustangens, einen Tangens oder einen Cotangens. Zum Beispiel ist (Grundintegral (10))

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \ln\left|\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}\right| = \ln\left|\tan(x/2+\pi/4)\right|.$$

3.5. Integration polynomialer trigonometrischer Funktionen. Hierfür ist die eben genannte Substitution oft zu umständlich. Es gibt mehrere Methoden, wir stellen zwei vor.

Linearisierung: Die verschiedenen Additionstheoreme können verwendet werden, um Potenzen trigonometrischer Funktionen durch Summen trigonometrischer Funktionen mit anderen Winkeln auszudrücken, diesen Prozess nennt man *Linearisierung*. Zwei einfache Beispiele verdeutlichen die Methode. Es ist

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \text{also} \quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}.$$

Ein etwas komplizierterer Integrand ist $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$. Hier kann man zum Linearisieren entweder die Additionstheoreme verwenden oder den Umweg über die Exponentialfunktion wählen, etwa so:

$$\begin{aligned}
\sin^3 x \cos^2 x &= \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]^3 \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]^2 \\
&= -\frac{1}{32i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\
&= -\frac{1}{32i}(e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\
&= -\frac{1}{32i}(2i \sin 5x - 2i \sin 3x - 4i \sin x) \;=\; -\frac{1}{16}\sin 5x + \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx \;=\; \frac{1}{80}\cos 5x - \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{1}{8}\cos x.$$

<u>Alternative Substitutionen:</u> Ein Polynom, in dem nur Sinus und Cosinus vorkommen und in jedem Monom mit mindestens einem ungeraden Exponenten, kann mit der Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ auf eines zurückgeführt werden, in dem eine der beiden Funktionen nur noch einmal vorkommt. Danach substituiert man so, dass die eine verbleibende Funktion auch noch verschwindet, im folgenden Beispiel also $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx \;=\; -\int (1 - u^2) u^2 \, du \\
&= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \;=\; -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}.
\end{aligned}$$

Durch Linearisieren überzeugt man sich, dass dies das gleiche Ergebnis wie zuvor ist. Denkt man genau nach, so sieht man, dass dies genau die Substitutionsmethode von rechts nach links ist, es handelt sich also um eine Standardsituation, wo diese Methode anwendbar ist.

4. Ein Wort der Warnung zum automatischen Integrieren

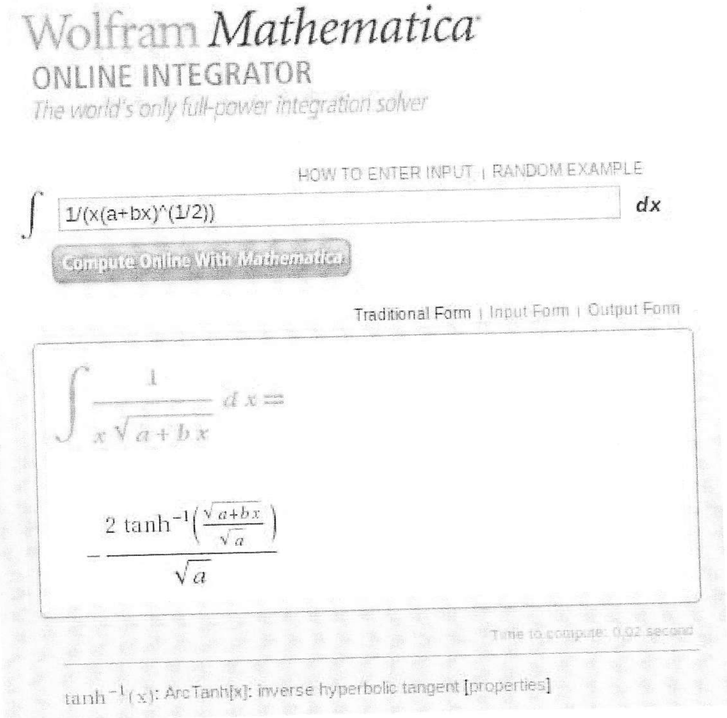
Es treten gegeneinander an:

(1) Maple 13, Waterloo Inc. 2009;
(2) Mathematica, Wolfram Research Inc. „Online integrator“
`http://integrals.wolfram.com/index.jsp`
(3) I. S. Gradshteyn, I. M. Ryshik, *Tables of integrals, series, and products*, unzählige Ausgaben seit 1943, siehe `http://www.mathtable.com/gr/` mit Druckfehlerlisten (die für unsere Integrale aber unwesentlich sind).

Wir wollen folgende unbestimmte Integrale berechnen, zufällig herausgegriffen an einem Montag morgen:

(1) $I_1 := \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx$, wobei über den Wert der Konstanten a, b nichts bekannt ist,
(2) $I_2 := \displaystyle\int x^p \tan x \, dx$, wobei wir zumindest eine Antwort für $p \in \mathbb{N}$ möchten.

Betrachten wir zunächst I_1. Hier die Antwort von Mathematica:



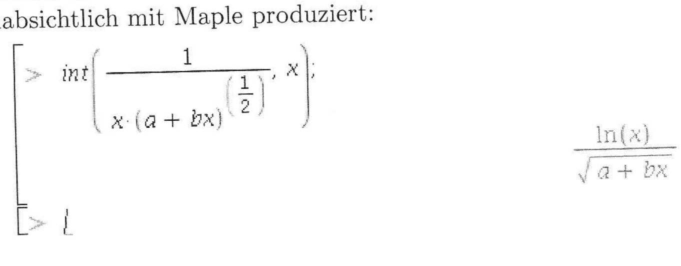
Die Antwort von Maple ist identisch.

Die Antwort von Gradshteyn-Ryshik (Nr. 2.224):

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+bx}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx}} \right| & [a > 0] \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} & [a < 0] \end{cases}$$

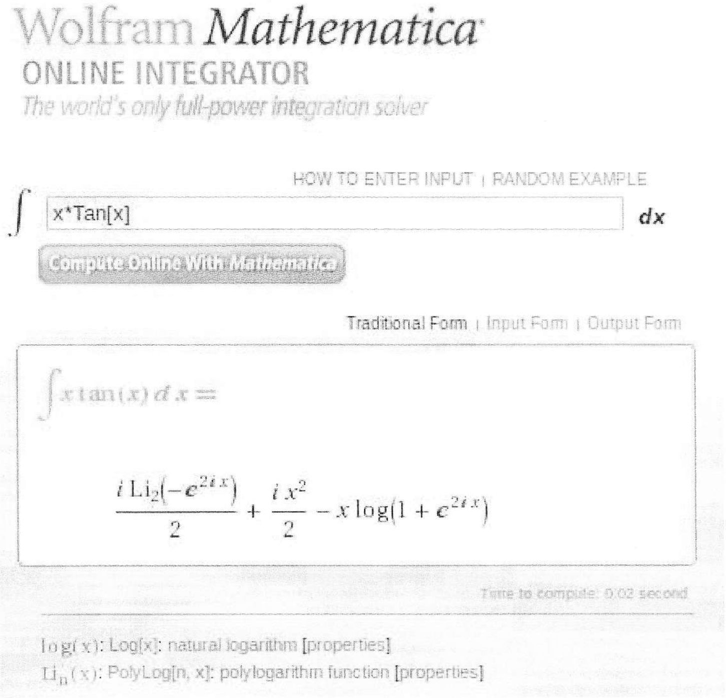
Man sieht: Die Antwort von Mathematica/Maple ist nicht falsch, aber unvollständig – das Programm setzt implizit $a > 0$ voraus, teilt dies dem Benutzer aber nicht mit (nur indirekt über den Ausdruck $\sqrt{a}$). Dass arctanh mal als Funktion, mal durch Logarithmen ausgedrückt wird, ist dagegen nicht so schlimm, da beide Schreibweisen vollkommen äquivalent sind. Fallunterscheidungen wie hier sind in Tabellenwerken meist sauber aufgeführt.

Und noch eine Warnung: Die Computeralgebra-Programme sind sehr anfällig für falsche Syntax, aber man merkt den Fehler nicht immer. Das folgende Beispiel wurde beim Vorbereiten dieser Notizen unabsichtlich mit Maple produziert:



Fehler gefunden? Es fehlt der Punkt zwischen b und x – das Programm interpretiert bx als eine neue Variable, deswegen wird nur $1/x$ integriert. Mathematica dagegen versteht bx auch ohne Punkt, s. o.

Nun zu I_2. Hier die beiden Antworten, zunächst wieder Mathematica:



Die Antwort für $p = 1$ von Maple 13 ist wieder identisch. Für allgemeines p liefern beide Computeralgebra-Programme überhaupt keine Antwort.

Gradshteyn-Ryshik (Nr. 2.646):

$$\int x^p \tan x \, dx \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(p+2k)(2k)!} B_{2k}\, x^{p+2k} \qquad [p \geq -1,\ |x| < \pi/2]$$

Die Antwort von Maple/Mathematica ist unbrauchbar: eine komplexe Stammfunktion für eine reelle Funktion, in der komplizierte – ebenfalls komplexe – Polylogarithmen auftauchen, und das bereits für $p = 1$! Der Grund für das Scheitern liegt in der Tatsache, dass die Stammfunktion keinen geschlossenen Ausdruck hat, sondern eine Reihendarstellung, für Computer mit endlichem Horizont ist das nichts. Die Koeffizienten in der Reihendarstellung hängen von den sog. *Bernoulli-Zahlen* ab, denen man in der Analysis häufiger begegnet: Es sind dies die Koeffizienten der Reihentwicklung

$$\frac{t}{e^t - 1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

In den sehr ausführlichen Anhängen von Gradshteyn-Ryshik werden die verwendeten speziellen Funktionen usw. ausführlich erklärt und die wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt. Die Bernoulli-Zahlen tauchen z. B. bei den sog. *Faulhaber'schen Formeln* auf, mit denen man die Summe k-ter Potenzen natürlicher Zahlen ausdrücken kann, also etwa $\sum_{n=1}^{m} n^k$.

5. Uneigentliche Riemann-Integrale auf $\mathbb{R}$

Ist $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine auf jedem endlichen Intervall $[a, x]$ beschränkte Riemann-integrierbare Funktion, so können wir $\int_a^x f(t)\, dt$ bilden und uns fragen, ob ihr Limes $x \to \infty$ existiert.

Definition 3 (Uneigentliches Integral). Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$, so sagen wir, dass f auf $[a,\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist und setzen

$$\int_a^\infty f(t)\,dt \;:=\; \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Analog definieren wir, falls es existiert, $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ für eine Funktion $f:]-\infty,b]\to\mathbb{R}$, die auf endlichen Intervallen beschränkt und Riemann-integrierbar ist.
Für eine Funktion $f:]-\infty,\infty[$ mit diesen Eigenschaften wird vereinbart, dass

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt+\int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Das bedeutet: die beiden Grenzwerte müssen existieren, wenn die Integrationsgrenzen unabhängig voneinander gegen $\pm\infty$ streben, es ist also z. B. *nicht* zulässig, $\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt$ mit $\lim\limits_{c\to\infty}\int_{-c}^c f(t)\,dt$ gleichzusetzen (ein solcher unbestimmer Integralbegriff ist denkbar, wird aber hier nicht behandelt).

Für Integrale dieser drei Typen gelten die üblichen Rechenregeln, sofern alle auftretenden Ausdrücke sinnvoll sind. es ist also etwa

$$\int_a^\infty (f(t)+g(t))\,dt \;=\; \int_a^\infty f(t)\,dt+\int_a^\infty g(t)\,dt.$$

Wir wiederholen sie hier nicht nochmals.

Beispiel 14. Das unbestimmte Integral $\int_0^\infty \sin t\,dt$ existiert nicht, weil $\int_0^x \sin t\,dt = -\cos x$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ existiert nicht.

Beispiel 15. Das unbestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ existiert $(n>1)$ und hat den Wert $\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\frac{\pi}{2}$. Substituiert man nämlich $t=\cot\varphi, dt=-(1+\cot^2\varphi)\,d\varphi$, $t=0\leftrightarrow\varphi=\pi/2$, $t=x\leftrightarrow\varphi=\operatorname{arccot}x$, so gilt

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \;=\; \int_{\operatorname{arccot}x}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(1+\cot^2\varphi)^{n-1}} \;=\; \int_{\operatorname{arccot}x}^{\pi/2}\sin^{2n-2}\varphi\,d\varphi.$$

Wenn $x\to\infty$, dann strebt $\operatorname{arccot}x\to 0$. Folglich ist

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \;=\; \int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}\varphi\,d\varphi \;=\; \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 16 (Poisson-Integral). Wir zeigen als nächstes $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Wir betrachten zunächst die Kreisscheibe $D^2(R)\subset\mathbb{R}^2$ und das Integral

$$F(R) \;=\; \int_{D^2(R)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Wir wollen zeigen, dass F als Funktion von R differenzierbar ist. Es ist für ein beliebiges $\varepsilon>0$

$$F(R+\varepsilon)-F(R) \;=\; \int\limits_{D^2(R+\varepsilon)-D^2(R)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Wenden wir den ersten MWS der Integralrechnung an, so wissen wir, dass ein Punkt $(x_0(\varepsilon), y_0(\varepsilon)) \in D^2(R+\varepsilon) - D^2(R)$ existiert mit

$$F(R+\varepsilon) - F(R) \;=\; e^{-x_0^2(\varepsilon)-y_0^2(\varepsilon)}\mathrm{vol}(D^2(R+\varepsilon) - D^2(R)) \;=\; e^{-x_0^2(\varepsilon)-y_0^2(\varepsilon)}\pi[(R+\varepsilon^2) - R^2].$$

Damit folgt

$$\frac{F(R+\varepsilon) - F(R)}{\varepsilon} \;=\; e^{-x_0^2(\varepsilon)-y_0^2(\varepsilon)}\pi(2R+\varepsilon).$$

Für $\varepsilon \to 0$ muss die Folge der Punkte $(x_0(\varepsilon), y_0(\varepsilon))$ nicht konvergent sein; es ist aber auf jeden Fall $x_0^2(\varepsilon) + y_0^2(\varepsilon) \to R^2$. Damit gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(R+\varepsilon) - F(R)}{\varepsilon} \;=\; e^{-R^2} 2\pi R.$$

F ist wie behauptet differenzierbar und es gilt $F'(R) = e^{-R^2}2\pi R$. Nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann

$$F(R) \;=\; F(R) - F(0) \;=\; \int_0^R F'(t)\,dt \;=\; \int_0^R \pi e^{-t^2} 2t\,dt \;=\; \pi(-e^{-t^2})\big|_0^R \;=\; \pi(1-e^{-R^2}).$$

Nun ist aber

$$D^2(R) \;\subset\; [-R,R]^2 \;\subset\; D^2(\sqrt{2}R), \quad \text{also } F(R) \;\leq\; \int_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \;\leq\; F(\sqrt{2}R),$$

und die beiden äußeren Zahlen dieser Abschätzung haben wir gerade berechnet. Der Satz von Fubini liefert für das mittlere Integral

$$\int_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \;=\; \left[\int_{-R}^R e^{-t^2}\,dt\right]^2 \;=\; 4\left[\int_0^R e^{-t^2}\,dt\right]^2.$$

Insgesamt ist nun

$$\pi(1-e^{-R^2}) \;\leq\; 4\left[\int_0^R e^{-t^2}\,dt\right]^2 \;\leq\; \pi(1-e^{-2R^2}),$$

und für $R \to \infty$ folgt die Behauptung.

Satz 5 (Cauchy, McLaurin). *Ist $f:\ [a,\infty[$ stetig, monoton fallend und positiv, dann existiert $\int_a^\infty f(t)\,dt$ genau dann, falls die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(a+n)$ konvergiert.*

Beweis. Der Satz beruht auf einer simplen Abschätzung. Für $x \in [a+k, a+k+1]$ gilt nach Voraussetzung

$$f(a+k+1) \;\leq\; f(x) \;\leq\; f(a+k), \quad \text{also } f(a+k+1) \;\leq\; \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)\,dx \;\leq\; f(a+k).$$

Dies impliziert

$$\sum_{n=1}^{k+1} f(a+n) \;\leq\; \int_a^{a+k+1} f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{n=0}^{k+1} f(a+n).$$

Weil alle Zahlen positiv sind, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4. Diesen Satz kann man in beiden Richtungen gut anwenden – zum Beweis der Existenz des uneigentlichen Integrals bei feststehender Konvergenz der Reihe und umgekehrt.

Beispiel 17. Wir zeigen (nochmal...), dass $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty 1/n^s$ für $s > 1$ konvergiert. Es ist nämlich für $s > 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t^s}\,dt \;=\; \frac{-1}{s-1}\left[\frac{1}{x^{s-1}} - 1\right], \quad \text{also } \int_1^\infty \frac{1}{t^s}\,dt \;=\; \frac{1}{s-1}.$$

Nun folgt die Konvergenz der Reihe aus dem vorherigen Satz.

Es gibt noch einen weiteren Typ uneigentlicher Integrale – solche, wo bis zu einer Stelle x_0 integriert werden soll, in der der Integrand gar nicht definiert ist. Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $]a,b[$ definiert und auf jedem abgeschlossenen Intervall $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ Riemann-integrierbar, also insbesondere $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ existent.

Definition 4. Wir sagen, dass f auf $]a,b[$ *uneigentlich integrierbar* ist, falls die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt, \quad \lim_{\beta\to b^-}\int_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt$$

existieren. Wir schreiben dann

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^{x_0} f(t) + \lim_{\beta\to b^-}\int_{x_0}^{\beta} f(t)\,dt.$$

Dabei ist x_0 ein beliebiger Punkt in $]a,b[$ und man prüft leicht nach, dass die Existenz dieser Grenzwerte nicht von x_0 abhängt. Ist $a = -\infty$ oder $b = +\infty$, so stimmt dieser Begriff mit dem zuvor definierten natürlich überein.

Beispiel 18 (Gamma-Funktion). Wir betrachten für $x > 0$

$$\Gamma(x) \;=\; \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Dies ist die Integral-Darstellung der Gamma-Funktion nach Euler (1730). Für $x \in]0,1[$ ist dieses Integral auch bei $t = 0$ uneigentlich. Wir zeigen zunächst die Existenz von $\Gamma(x)$: wir haben

$$0 \;<\; t^{x-1}e^{-t} \;<\; t^{x-1} \quad \text{für } t > 0.$$

Damit ist

$$0 \;<\; \int_\alpha^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \;\le\; \int_\alpha^1 t^{x-1}\,dt \;=\; \frac{1}{x}t^x\Big|_\alpha^1 \;=\; \frac{1}{x} - \frac{\alpha^x}{x}.$$

Wegen $x > 0$ gilt also für $\alpha > 0$

$$\int_\alpha^1 t^{x-1}e^{-t}\,dr \;<\; \frac{1}{x},$$

und weil bei $\alpha \to 0$ das Integral $\int_\alpha^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ wächst und durch $1/x$ beschränkt ist, muss $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\displaystyle\int_\alpha^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ existieren. Damit existiert $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Analog, $t^{x-1}e^{-t} \;=\; \dfrac{t^{x+1}}{e^t}\dfrac{1}{t^2}$ und $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0$. Damit existiert ein M mit

$$t^{x-1}e^{-t} \;\le\; \frac{1}{t^2} \text{ für alle } t \ge M.$$

Daraus folgt

$$\int_M^\beta t^{x-1}e^{-t}\,dt \;\le\; \int_M^\beta \frac{1}{t^2}\,dt \;=\; -\frac{1}{t}\Big|_M^\beta \;\le\; \frac{1}{M}.$$

Weil $\int_M^\beta t^{x-1}e^{-t}\,dt$ wachsend in β ist, folgt $\lim_{\beta\to\infty}\int_M^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ existiert. Damit existiert auch

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \;=\; \int_1^M t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_M^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Damit ist gezeigt, dass $\Gamma(x)$ für $x > 0$ existiert. Weiterhin haben wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \;\overset{\sqrt{t}=u}{=}\; \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}2u\,du \;=\; 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

Also folgt aus dem Wert des Poisson-Integrals $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Weiterhin haben wir für $x > 1$

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = -\int_0^\infty t^{x-1}\left(e^{-t}\right)'\,dt = -t^{x-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (x-1)t^{x-2}e^{-t}\,dt \\ &= 0 + (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt,\end{aligned}$$

also $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ für $x > 1$. Letztlich gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$

Damit folgt

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = (n-1)!, \quad \text{also } \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Euler's Motivation für die Einführung der Gamma-Funktion war es denn auch, eine Funktion zu finden, die auf besonders günstige Weise die Fakultät „fortsetzt". Das Volumen der Kugel $D^n(R)$ drückt sich durch die Γ-Funktion besonders einfach aus. Es gilt nämlich

$$\operatorname{vol} D^n(R) = \frac{R^n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Wir beweisen dies induktiv. Dafür überprüfen wir die Gleichung zunächst für $n = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} D^1(R) &= 2R, \quad \frac{R^1\pi^{1/2}}{\Gamma(1+1/2)} = \frac{R\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = 2R \\ \operatorname{vol} D^2(R) &= \pi R^2, \quad \frac{R^2\pi}{\Gamma(1+1)} = \frac{R^2\pi}{1!} = R^2\pi.\end{aligned}$$

Gelte jetzt die Gleichung für $n-2$. Wir beweisen dann die Gleichung für n unter Verwendung der Rekursionsformel für das Volumen von D^n:

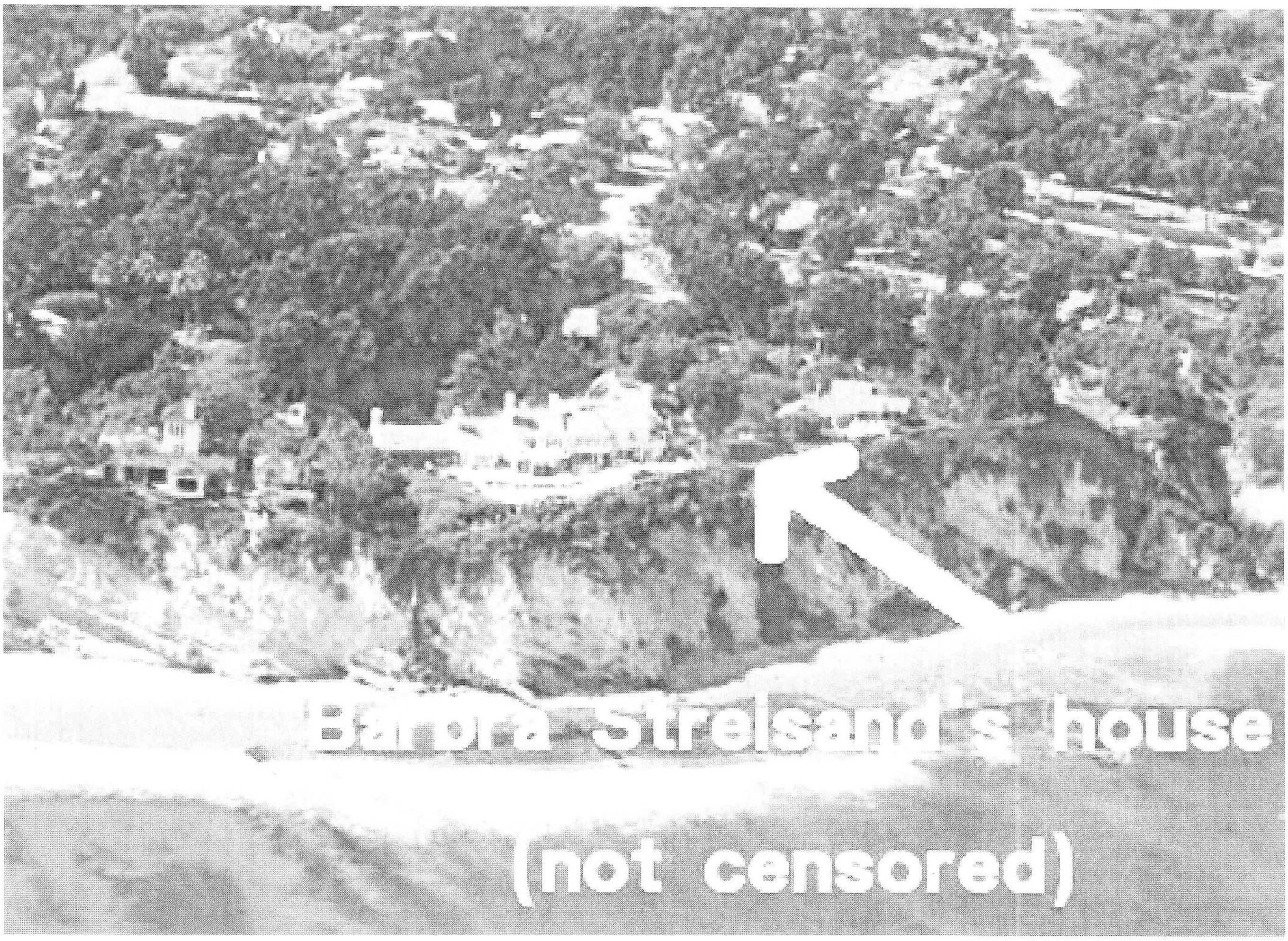
$$\operatorname{vol} D^n(R) = \frac{2\pi}{n}R^2 \operatorname{vol} D^{n-2}(R) = \frac{2\pi}{n}R^2 \cdot \frac{R^{n-2}\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} = \frac{R^n\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{R^n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Damit kann man die Stirling'sche Formel der Hausaufgaben alternativ schreiben als

$$\Gamma(x) \simeq \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}.$$

Die Gamma-Funktion kann, ähnlich wie die Riemann'sche Zeta-Funktion, auf komplexe Werte $x \in \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der speziellen Funktionen. Sie kann auch noch ganz anders als hier geschehen geschrieben werden; z. B. fand Gauß 1813 die Darstellung

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!x^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$


Barbra Streisand's house
(not censored)

Kapitel 1

Anhang

1. Trigonometrie

Die Aufstellung dieses Abschnitts soll Ihnen als Formelsammlung dienen.

1.1. Formeln für gleiche Winkel.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \qquad \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

1.2. Formeln für negative und verschobene Winkel.

$$\begin{array}{lll}
\sin(-\alpha) = -\sin\alpha & \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha & \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \\
\cos(-\alpha) = \cos\alpha & \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha & \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\
\tan(-\alpha) = -\tan\alpha & \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha & \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \\
\cot(-\alpha) = -\cot\alpha & \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha & \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha & \sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha \\
\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha & \cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha \\
\tan(\pi/2-\alpha) = \tan\alpha & \tan(\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha
\end{array}$$

1.3. Additionstheoreme.

$$\begin{array}{ll}
\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} & \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}
\end{array}$$

1.4. Winkelverdoppelungsformeln.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\text{Wenn } t := \tan\frac{\alpha}{2}: \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

1.5. Linearisierungsformeln.

$$\begin{aligned}
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \\
2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

$$\text{Spezialfall}: \quad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha), \quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos(2\alpha).$$

1.6. Transformation von Summen in Produkte.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

1.7. Besondere Werte trigonometrischer Funktionen.

α	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
$\cot\alpha$	–	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–

1.8. Lösungen der trigonometrischen Fundamentalgleichungen.

- Gilt $\cos f(x) = \cos g(x)$, so ist entweder $f(x) = g(x) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ oder $f(x) = -g(x) + 2l\pi$ für ein $l \in \mathbb{Z}$.
- Gilt $\sin f(x) = \sin g(x)$, so ist entweder $f(x) = g(x) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ oder $f(x) = \pi - g(x) + 2l\pi$ für ein $l \in \mathbb{Z}$.
- Gilt $\tan f(x) = \tan g(x)$, so ist $f(x) = g(x) + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $f(x), g(x) \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

2. Polynomdivision und Partialbruchzerlegung

Eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ein zunächst beliebiger Körper) heißt ein Polynom vom Grad n, falls es Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gibt ($a_n \neq 0$) gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$(*) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Streng genommen hat das Nullpolynom $f(x) = 0$ keinen Grad, doch zählt man bei den „Polynomen vom Grad $\leq n$" das Nullpolynom gewöhnlich mit. Wir schreiben $n = \deg f$ für den Grad von f. Die Summendarstellung $(*)$ ist die gebräuchlichste für Polynome, doch natürlich wird ebenso durch

$$g(x) = b_0(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n), \quad 0 \neq b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$$

ebenso ein Polynom vom Grad n definiert. Um den Funktionswert eines Polynoms in der Summendarstellung $(*)$ auszurechnen, benötigt man $2n - 1$ Multiplikationen und n Additionen. Das Horner-Schema[1] erlaubt es, den Rechenaufwand auf n Multiplikationen und n Additionen zu reduzieren (bei günstigeren Rundungsfehlern). Gleichzeitig erlaubt es die Division durch

[1]William George Horner, geb. 1756 in Bristol, gest. 1837 in Bath. Er war Zeit seines Lebens als Lehrer tätig, seine Ergebnisse zum Horner-Schema publizierte er 1819. Der bekannte chinesische Mathematiker Chu Shih-chieh (1270-1330) hatte dies jedoch schon 500 Jahre früher entdeckt.

Polynome der Form $x - b$. Es beruht auf der Beobachtung, dass man das Polynom $(*)$ auch geklammert schreiben kann als

$$(**) \qquad f(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Lemma 1 (Horner-Schema). *Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n, geschrieben wie in $(*)$. Sei $b \in \mathbb{K}$. Für die rekursiv definierten Zahlen*

$$c_n = a_n, \quad c_{n-1} = c_n b + a_{n-1}, \quad c_{n-2} = c_{n-1} b + a_{n-2}, \quad \ldots, \quad c_0 = c_1 b + a_0$$

gilt: $f(b) = c_0$ und $f(x) = (x - b)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \ldots + c_2 x + c_1) + f(b)$.

Beweis. Die oben gegebene Klammerung $(**)$ beweist $f(b) = c_0$. Die Zerlegung beweist man durch direktes Nachrechnen. □

Per Hand berechnet man die Koeffizienten wie folgt:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
b		$c_n b$	$c_{n-1} b$	$\ldots$	$c_2 b$	$c_1 b$
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\ldots$	c_1	$f(b)$

Man schreibe die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ wie gezeigt in eine dreizeilige Tabelle, das b steht links zur Erinnerung. Zunächst wird das $a_n = c_n$ nach unten übernommen (grüner Pfeil), danach c_n mit dem gemerkten b multipliziert und unter a_{n-1} geschrieben (erster linker roter Pfeil). Die Elemente $c_n b$ und a_{n-1} werden sodann addiert und das Ergebnis in der dritten Zeile, dritten Spalte notiert (erster blauer Pfeil). Das Verfahren wird bis zum Ende fortgeführt, so dass man die Koeffizienten c_n und $f(b)$ leicht in der letzten Zeile ablesen kann.
Wir illustrieren das Verfahren an einem Beispiel. Das Polynom $f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 2x^2 + 4$ ist bei $x = 2$ auszuwerten. Man erhält das Horner-Schema

	6	-3	0	0	2	0	4
2		12	18	36	72	148	296
	6	9	18	36	74	148	300

Dies bedeutet: $f(2) = 300$ und $f(x) = (x - 2)(6x^5 + 9x^4 + 18x^3 + 36x^2 + 74x + 148) + 300$. Ist insbesondere eine Zahl $b \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $f(x)$, dann faktorisiert $f(x) = (x - b)g(x)$ mit einem Polynom $g(x)$, welches von einem Grad niedriger als f ist. Man nennt b eine k-fache Nullstelle von f, falls ein Polynom $h(x)$ existiert, welches eine Faktorisierung $f(x) = (x-b)^k h(x)$ zulässt.
Kennt man eine Nullstelle x_0 des Polynoms f, so kann man mit dem Horner-Schema die Faktorisierung herstellen, oder, was dasselbe ist, das ursprüngliche Polynom f durch einen Faktor $(x - x_0)$ „teilen".

Beispiel 1. Bei dem Polynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ sieht man leicht ein, dass $x = 1$ eine Nullstelle ist. Wir faktorisieren mit dem Horner-Schema:

	1	2	-3	-4	4
1		1	3	0	-4
	1	3	0	-4	0

Die letzte Null in der dritten Zeile bestätigt, dass $x = 1$ eine Nullstelle ist. Die Faktorisierung liest man sofort ab, sie lautet $f(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4)$. Setzt man $x = 1$ in den zweiten Faktor ein, so sieht man, dass dies wieder eine Nullstelle ist. Insgesamt erhält man $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$: f hat zwei doppelte Nullstellen.

Will man das Polynom durch ein beliebiges zweites Polynom $g(x)$ teilen, das nun kein Linearfaktor $(x - x_0)$ ist, so hat man zwei Möglichkeiten:

1. Weg: Iteriertes Faktorisieren. Man bestimme die Nullstellen von g, stelle es als Produkt von Linearfaktoren dar und iteriere das Horner'sche Faktorisierungsverfahren. Meist ist die Polynomdivision der erste Schritt der unten beschriebenen Partialbruchzerlegung, für die man die Nullstellen von g ohnehin braucht.

2. Weg: Formale Polynomdivision. Diese wird ausgeführt wie beim schriftlichen Dividieren.

Ein Beispiel erläutert am einfachsten, wie dies zu tun ist. Wir wollen die Polynomdivision $\dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$ ausführen.

1. Weg: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, man muss also zweimal nach Horner durch $x - 1$ teilen.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}\ , \quad \text{d.h. } x^2 \;=\; (x-1)(x+1) + 1 \text{ oder } \frac{x^2}{x-1} \;=\; 1 + x + \frac{1}{x-1}.$$

Im zweiten Schritt muss man nun $1 + x$ durch $x - 1$ teilen, denn dies ist der Polynomanteil des Bruchs. Also

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & 2 \end{array}\ , \quad \text{d.h. } x + 1 \;=\; (x-1)\cdot 1 + 2.$$

Eingesetzt ins vorherige Ergebnis erhält man

$$\frac{x^2}{x-1} \;=\; (x-1) + 2 + \frac{1}{x-1}, \quad \text{also} \quad \frac{x^2}{(x-1)^2} \;=\; 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

2. Weg: Die formale Polynomdivision benötigt nur einen Schritt:

$$\begin{array}{llll} x^2 & +0\cdot x & +0 & : x^2 - 2x + 1 \;=\; 1 \\ -x^2 & +2x & -1 & \\ \hline 0 & 2x & -1 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} \;=\; 1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

In diesem einfachen Beispiel hätte man das Ergebnis natürlich am schnellsten durch kurzes Nachdenken erhalten können:

$$\frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} \;=\; \frac{x^2 - 2x + 1 + (2x - 1)}{x^2 - 2x + 1} \;=\; 1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Dies funktioniert öfter als man denkt...

Definition 1 (rationale Funktion)**.** Eine Funktion f heißt *rational*, falls es Polynome $p(x)$, $q(x)$ ohne gemeinsame Faktoren gibt, für die $f(x) = p(x)/q(x)$ gilt. Die Nullstellen des Nenners $q(x)$ werden *Polstellen* von f genannt, ihre Ordnung ist gerade die Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle.

Satz 1 (Komplexe Partialbruchzerlegung)**.** *Jede rationale Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutige Darstellung als*

$$f(x) \;=\; \frac{p(x)}{q(x)} \;=\; r(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j},$$

wobei gilt:

(1) *$r(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\deg p - \deg q$; gilt $\deg p < \deg q$, so ist dieser Term nicht vorhanden.*

(2) $x_1, \ldots, x_n$ *sind die Polstellen der Vielfachheit* $r_1, \ldots, r_n$ *von* f.
(3) a_{ij} *sind komplexe Zahlen.*

Sind die Polstellen bekannt, so besteht die eigentliche Aufgabe der Partialbruchzerlegung darin, das Polynom $r(x)$ sowie die Koeffizienten a_{ij} zu bestimmen. Hierfür macht man einen geeigneten Ansatz: für die erste Polstelle x_1 der Vielfachheit r_1

$$\frac{a_{11}}{x-x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1r_1}}{(x-x_1)^{r_1}},$$

und analog für alle weiteren Polstellen.

Beispiel 2. Man bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$. Zunächst führt man die Polynomdivision aus, da $\deg p = \deg q$: Dies haben wir schon gemacht, es war $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$. Weil 1 doppelte Polstelle des Nenners ist, existieren Konstanten a, b, für die sich der Restterm schreiben lässt als

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

Entweder berechnet man a, b durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich, oder man bemerkt, dass wir eine solche Darstellung bereits durch das iterierte Horner-Verfahren erhalten hatten.

Beispiel 3. Für $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)}$ lautet der Partialbruchansatz

$$f(x) = \frac{a_{11}}{(x-1)^1} + \frac{a_{12}}{(x-1)^2} + \frac{a_{13}}{(x-1)^3} + \frac{a_{21}}{(x-2)^1}.$$

Multiplikation mit dem Nennerpolynom $(x-1)^3(x-2)$ führt auf

$$x^2+x+1 = a_{11}(x-1)^2(x-2) + a_{12}(x-1)(x-2) + a_{13}(x-2) + a_{21}(x-1)^3.$$

Am schnellsten findet man nun die Koeffizienten a_{ij}, indem man einfache Werte von x einsetzt (hier; $x = 0, 1, 2, 3\ldots$) oder das Polynom auf der rechten Seite nach x-Potenzen sortiert und dann die Koeffizienten vergleicht (oder eine Kombination aus beidem). Ergebnis: $a_{11} = -7$, $a_{12} = -6$, $a_{13} = -3$, $a_{21} = 7$.

Beispiel 4. Die rationale Funktion $f(x) = \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x}$ hat die Polstellen $0, i, -i$, jede einfach. Ansatz und Ergebnis der Partialbruchzerlegung lauten damit

$$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{a_{11}}{x} + \frac{a_{21}}{x-i} + \frac{a_{31}}{x+i} = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{2-i}{x-i} + \frac{2+i}{x+i}.$$

Mitunter – insbesondere, falls die ursprüngliche rationale Funktion reelle Koeffizienten hat – will man das Auftreten komplexer Zahlen vermeiden, indem man die beiden letzten Terme zu einem Summand der Gestalt

$$\frac{2-i}{x-i} + \frac{2+i}{x+i} = \frac{ax+b}{x^2+1} = \ldots = \frac{4x+2}{x^2+1}$$

zusammenfasst. Dies ist die sogenannte *reelle Partialbruchzerlegung.*

Bemerkung 1 (reelle Partialbruchzerlegung)**.** Hat die rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ nur reelle Koeffizienten, so ist es manchmal erwünscht, vom Nenner $q(x)$ nur die reellen Nullstellen zu betrachten. Sei etwa q der Gestalt $q(x) = (ax^2+bx+c)\tilde{q}(x)$, wobei ax^2+bx+c keine reellen Nullstellen hat und in $\tilde{q}(x)$ nicht mehr als Faktor vorkommt. Weil nach Voraussetzung $a, b, c \in \mathbb{R}$, sind die beiden Nullstellen dieses Polynoms zueinander komplex konjugiert, und man kann in der Partialbruchzerlegung die beiden Terme entsprechend zusammenfassen,

$$\frac{b_1}{x-x_0} + \frac{b_2}{x-\overline{x}_0} = \frac{cx+d}{(x-x_0)(x-\overline{x}_0)}.$$

Man sieht nun leicht, wie der Ansatz der Partialbruchzerlegung dann zu verändern ist.

Satz 2 (Reelle Partialbruchzerlegung). *Jede rationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Darstellung als*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x-z_i)^j(x-\bar{z}_i)^j}$$

wobei gilt:

(1) *$r(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\deg p - \deg q$; gilt $\deg p < \deg q$, so ist dieser Term nicht vorhanden.*
(2) *$x_1, \ldots, x_n$ sind die reellen Polstellen der Vielfachheit $r_1, \ldots, r_n$ von f.*
(3) *$z_1, \ldots, z_m$ sind die komplexen Polstellen der Vielfachheit $s_1, \ldots, s_m$ von f.*
(4) *a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sind reelle Zahlen.*

Bemerkung 2 (Spezialfall: Partialbruchzerlegung ohne Vielfachheiten). Ganz besonders einfach werden die Rechnungen, wenn der Nenner von $f(x) = p(x)/q(x)$ nur einfache Nullstellen hat (ob reell oder komplex spielt hier keine Rolle). Es ist dann also

$$q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$$

für paarweise verschiedene komplexe Zahlen x_i. Wir nehmen an, dass der polynomiale Anteil bereits abgespalten ist, also $\deg p < \deg q = k$. Damit hat die PBZ von f die Form ($A_i := a_{i1}$)

$$f(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_k}{x-x_k}.$$

Offensichtlich ist dann aber $A_i = \lim_{x\to x_i}(x-x_i)\frac{p(x)}{q(x)}$; da aber

$$\lim_{x\to x_i}\frac{q(x)}{x-x_i} = \lim_{x\to x_i}\frac{q(x)-q(x_i)}{x-x_i} = q'(x_i)$$

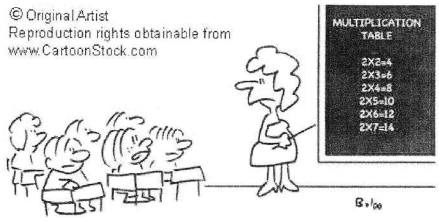
ist und dieser Wert, weil x_i eine einfache Nullstelle von $q(x) = 0$ sein sollte, so ist

$$A_i = \frac{p(x_i)}{q'(x_i)}.$$

Wir halten das Ergebnis fest.

Satz 3 (Komplexe PBZ ohne Vielfachheiten). *Sei $f(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion mit $\deg p < \deg q =: k$ und Polstellen $x_1, \ldots, x_k$, die alle die Vielfachheit eins haben. Dann ist die Partialbruchzerlegung von f gegeben durch*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p(x_i)}{q'(x_i)}\frac{1}{x-x_i}.$$



"No offense, but by the time we're in the job market, won't that stuff be *obsolete?*"


Barbra Streisand's house
(not censored)